

1. Τίτλος.Ο ερευνητής και οι χελώνες ΚΑΡΕΤΑ ΚΑΡΕΤΑ !

Ένας ερευνητής εξετάζει την επίδραση ενός αναισθητικού σε 10 χελώνες Καρέτα - Καρέτα προκειμένου να το προωθήσει σε χειρουργούς για λεπτές σωτήριες επεμβάσεις σε αυτές. Μελετά τους χρόνους που μεσολάβησαν ώσπου οι χελώνες να αναισθητοποιηθούν, εμβολιάζοντας τις με διαφορετική δόση κάθε φορά. Αναρωτιέται αν υπάρχει σχέση μεταξύ της δόσης φαρμάκου και του χρόνου αναισθητοποίησης ώστε να μπορεί να κάνει προβλέψεις με αρκετή σιγουριά και να συμπεριλάβει τις οδηγίες αυτές στο κουτί συσκευασίας του φάρμακου .

Ταυτότητα του σεναρίου.

- **Συγγραφέας:** Αρδαβάνη Καλλιόπη
- **Γνωστική περιοχή των μαθηματικών:** Άλγεβρα .
- **Θέμα:** Ανεξάρτητη και εξαρτημένη μεταβλητή. Πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών συνάρτησης. Μελέτη της γραφικής παράστασης της $y=ax+\beta$. Αλλαγή κλίμακας της γραφικής παράστασης Μετασχηματισμοί της $y=ax$. Έννοια της αντίστροφης συνάρτησης .
- **Βασική ιδέα.** Αυτή προήλθε από μια εφαρμογή του σχολικού βιβλίου Μαθηματικών Γ Λυκείου.
Το πρόβλημα με την δοσολογία φαρμάκου και τον χρόνο επίδρασης αναισθητικού προσφέρεται για τον σχεδιασμό δραστηριοτήτων που αναδεικνύουν τη δυναμική μιας πραγματικής κατάστασης. Οι μαθητές καλούνται να διαλέξουν και να ορίσουν την ανεξάρτητη μεταβλητή (χρόνος - ποσότητα φαρμάκου), να φτιάξουν πίνακα αντίστοιχων τιμών και να δουν τα αντίστοιχα ζευγάρια ως σημεία στο επίπεδο. Ερευνούν, αναζητούν, πειραματίζονται αν υπάρχει ευθεία ή καμπύλη που διέρχεται από αυτά. Η μαθηματοποίηση του προβλήματος δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να εμπλακούν σε διαδικασίες μοντελοποίησης μιας πραγματικής κατάστασης και επίλυσης του προβλήματος.

2. Σκεπτικό της δραστηριότητας.

- **Καινοτομίες.** Η διαδικασία που ακολουθείται στη διδακτική αυτή πρόταση θα μπορούσαμε να πούμε ότι “αντιστρέφει” την παραδοσιακή διαδικασία που ακολουθείται για την μελέτη των συναρτήσεων και τη λύση αντιστοίχων προβλημάτων. Οι μαθητές δεν έχουν δηλαδή δεδομένη τη συνάρτηση ώστε να την εφαρμόσουν και να απαντήσουν στα ερωτήματα του προβλήματος, αλλά μπαίνουν στη διαδικασία να προσεγγίσουν ερευνητικά δεδομένα κατασκευάζοντας μόνοι τους μία συνάρτηση. Αυτή ακριβώς η διαδικασία δεν είναι εύκολα προσεγγίσιμη με τα παραδοσιακά μέσα διδασκαλίας, ενώ αντίθετα ενθαρρύνεται με τη χρήση του προτεινόμενου εκπαιδευτικού λογισμικού.

- **Προστιθέμενη αξία.**

Το σενάριο βάζει τους μαθητές αλλά και τους διδάσκοντες σε διερευνητική διαδικασία που δεν μπορεί να γίνει παραδοσιακά.

Πιο συγκεκριμμένα : Οι μαθητές επιλέγουν την ανεξάρτητη μεταβλητή και ορίζουν το πεδίο ορισμού. Αναπροσαρμόζουν την κλίμακα ώστε να βλέπουν στο γράφημα τα σημεία μιας περιοχής. Προσεγγίζουν σημεία μέσω μιας ευθείας πειραματιζόμενοι σαν να κρατούν ένα χάρακα στο χέρι και να τον μετακινούν ώστε να περάσει όσο το δυνατόν πιο κοντά σε αυτά . Το λογισμικό τους παρέχει τη δυνατότητα σε κάθε φάση του πειραματισμού τους να βλέπουν τον τύπο της ευθείας.

Παράλληλα δίνεται η δυνατότητα στον διδάσκοντα να αναφερθεί και σε ήδη διδαγμένες έννοιες όπως π.χ. τα ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα ποσά

Είναι πολύ σημαντική η δυνατότητα να έχουν οι μαθητές πολλαπλές αναπαραστάσεις της ίδιας συνάρτησης με χρήση του πίνακα τιμών της, τον τύπο της ,το γράφημα της που εξυπηρετεί στην μελέτη της.

- **Γνωστικά – διδακτικά προβλήματα** Οι μαθητές γνωρίζουν την ευθεία ως γεωμετρικό σχήμα και ως γραφική παράσταση των $y=x$, $y=ax$, $y=ax+b$ ανεξάρτητων μεταξύ τους και άσχετα από την καθημερινότητα.. Δυσκολεύονται να κατασκευάσουν συναρτήσεις για να λύσουν πραγματικά προβλήματα. Δεν κατανοούν τον συσχετισμό δύο μεταβλητών και τη χρησιμότητα της γνώσης αυτής.

- **Θεωρητικό πλαίσιο.** Οι μαθητές πειραματίζονται, διερευνούν, αναρωτιούνται, επιλέγουν, αποφασίζουν, δημιουργούν. Επικοινωνούν, συνεργάζονται, αλληλεπιδρούν μεταξύ τους αλλά και με το λογισμικό.

3. Πλαίσιο εφαρμογής.

Σε ποιους απευθύνεται.

Σε μαθητές Β', Γ' Γυμνασίου Α' Λυκείου

Χρόνος υλοποίησης. 2-3 διδακτικές ώρες

Χώρος υλοποίησης. Οι μαθητές εργάζονται στο χώρο του εργαστηρίου υπολογιστών ανά 2 – 3 σε κάθε υπολογιστή.

- **Προαπαιτούμενες γνώσεις των μαθητών.**

Οι μαθητές θα πρέπει να έχουν διδαχθεί τις συναρτήσεις $y=ax$, $y=ax+b$, $y=a/x$ καθώς και τις γραφικές τους παραστάσεις

- Να γνωρίζουν βασικές λειτουργίες του λογισμικού Function Probe.

- **Απαιτούμενα βοηθητικά υλικά και εργαλεία.** Για την διεξαγωγή της δραστηριότητας απαιτούμενο είναι να είναι εγκατεστημένο το λογισμικό του function probe στους υπολογιστές, το φύλλο εργασίας του μαθητή και βασικές οδηγίες για την λειτουργία του λογισμικού.

- **Κοινωνική ενορχήστρωση της τάξης.** Οι μαθητές είναι σε ομάδες των 2 – 3 ατόμων με κοινό φύλλο εργασίας ο ένας κρατάει σημειώσεις ο δεύτερος χειρίζεται τον υπολογιστή ο τρίτος συντονίζει για την επίτευξη της δραστηριότητας. Οι ρόλοι θα πρέπει να εναλλάσσονται.

Ο διδάσκων παρακολουθεί, παροτρύνει, και καθοδηγεί τις ομάδες

Στόχοι της δραστηριότητας. Οι μαθητές θα αλληλεπιδράσουν με το πρόγραμμα, θα κατανοήσουν τις έννοιες του πεδίου ορισμού και τιμών μιας συνάρτησης και του τι σημαίνουν αυτά σε ένα πραγματικό πρόβλημα.

Θα ξεκαθαρίσουν την έννοια αντιστρόφως ανάλογα ποσά.

Θα μπορούν να βλέπουν μια ευθεία του επίπεδου ως μετασχηματισμό της $y=ax$ και θα μπορούν να πραγματοποιούν

μετασχηματισμούς της για να κάνουν τη γραφική παράσταση μιας άλλης. Θα γνωρίζουν την έννοια της αντίστροφης συνάρτησης.

4. **Ανάλυση της δραστηριότητας.** Η εφαρμογή του σεναρίου στην τάξη υλοποιείται μέσα από τα βήματα του φύλλου εργασίας που δίνεται σε κάθε ομάδα. Σε αυτό έχουν συναφθεί οδηγίες και εικόνες των εργαλείων του λογισμικού για την διαδικασία επίλυσης του προβλήματος. Οι μαθητές ενημερώνονται για το πρόβλημα συνολικά και κατόπιν απαντούν στα ερωτήματα.

Στην Α φάση ενημερώνονται για το πρόβλημα, ενεργοποιούνται για να καταχωρήσουν τα δεδομένα σε πίνακα του λογισμικού και παρατηρούν το είδος της σχέσης τους. Συζητούν και προτείνουν την ανεξάρτητη μεταβλητή της σχέσης αυτής. Στέλνουν τα ζεύγη τιμών που ορίζονται από αυτή τη διαδικασία σαν σημεία στο γράφημα και αλλάζουν την κλίμακα για να τα βλέπουν.

Στην Β φάση προσπαθούν να δουν τα παραπάνω σημεία ως σημεία γνωστής γραμμής. Δοκιμάζουν τη γνωστή τους $y=x$ ή $y=-x$ και με τη βοήθεια εργαλείων του λογισμικού τη μετασχηματίζουν, αλλάζουν ώστε να διέρχεται από τα περισσότερα σημεία του γραφήματος. Φτιάχνουν διεργασία για τον υπολογισμό πολλών τιμών της παραπάνω σχέσης συνάρτησης.

Στην Γ Φάση απαντούν σε ερωτήματα που στοχεύουν στην καλύτερη κατανόηση του τι σημαίνει πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης και σε τι μας χρησιμεύει. Με το αντίστροφο ερώτημα για να υπολογίσουν τη δόση φαρμάκου ώστε να έχει ο ερευνητής το ποθητό αποτέλεσμα χρόνου αναισθητοποίησης μιας χελώνας εμπλέκονται με τη έννοια της αντίστροφης συνάρτησης.

Στο φύλλο εργασίας που τους δίνεται γράφουν οι μαθητές τα ονόματά τους. Δίνεται το πρόβλημα σε όλους τους μαθητές από τον διδάσκοντα

Ενδεικτικό φύλλο εργασίας του μαθητή Α΄ Λυκείου

Α΄ΦΑΣΗ

Σώστε τις χελώνες ΚΑΡΕΤΑ - ΚΑΡΕΤΑ!

Το πρόβλημα: Ένας ερευνητής εξετάζει την επίδραση ενός αναισθητικού σε 10 χελώνες Καρέτα - Καρέτα προκειμένου να το προωθήσει σε χειρουργούς για λεπτές σωτήριες επεμβάσεις σε αυτές. Μελετά τους χρόνους που μεσολάβησαν ώσπου οι χελώνες να χάσουν τις αισθήσεις τους (να λιποθυμήσουν) εμβολιάζοντας τις με διαφορετική δόση κάθε φορά. Παρατηρεί ότι όταν οι δόσεις είναι 0.30, 0.35, 0.40, 0.45, 0.55, 0.60, 0.65, 0.70, 0.75, 0.80 mgr οι αντίστοιχοι χρόνοι λιποθυμίας είναι :12.5, 11.5, 11, 8.5, 7, 6, 5, 4, 2.5, 2 sec.



Ζητείται από τους μαθητές να συμπληρώσουν τις 2 πρώτες στήλες του πίνακα γράφοντας στη πρώτη στήλη τις δόσεις φαρμάκου σε mgr και στη δεύτερη τους αντίστοιχους χρόνους λιποθυμίας σε sec των χελωνών

Πίνακας				
Αρχείο	Επεξεργασία	Αποστολή	Παράθυρα	Πίνακας
m	t			
δόση(Mgr)	χρονος			
0.3	12.5			
0.35	11.5			
0.4	11			
0.45	8.5			
0.55	7			
0.6	6			
0.65	5			
0.7	4			
0.75	2.5			
0.8	2			

ονομάζοντας την πρώτη m και την δεύτερη t .

Να παρατηρήσουν τα δεδομένα στον πίνακα και να γράψουν τις παρατηρήσεις τους. Αν παρατηρήσουν ότι (ίσως) τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα μπορεί ο διδάσκων να τους παροτρύνει να το ψάξουν με την βοήθεια του λογισμικού και σε μια νέα στήλη του πίνακα να ζητήσουν μια σχέση που θα πρέπει να ικανοποιούν αυτά π.χ $z=m*t$

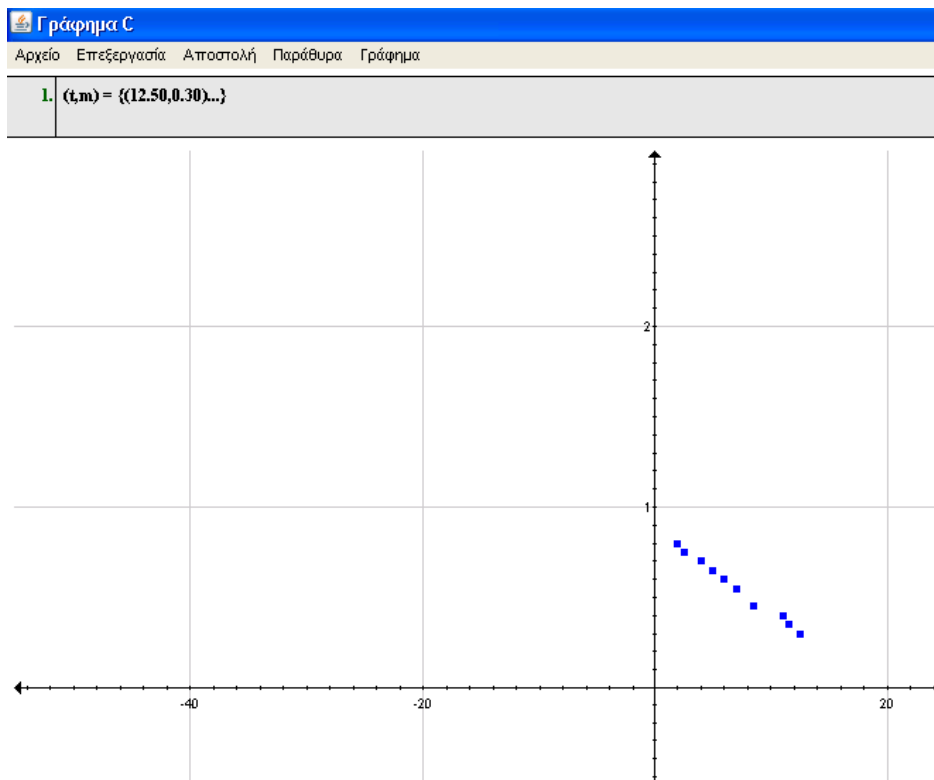
Κατόπιν θα πρέπει να συζητήσουν για το ποιο από τα δύο ποσά εξαρτάται από το άλλο. Αυτό μπορεί να γίνει θέτοντας ο διδάσκων την ερώτηση: Από τι εξαρτάται τι;

Στη συνέχεια καλούνται να βάλουν το  στη στήλη της ανεξάρτητης μεταβλητής και το  στη στήλη της εξαρτημένης.

Πίνακας				
Αρχείο	Επεξεργασία	Αποστολή	Παράθυρα	Πίνακας
x	y			
m	t			
δοσπ(Mar)	χρονος			
0.3	12.5			
0.35	11.5			
0.4	11			
0.45	8.5			
0.55	7			
0.6	6			
0.65	5			
0.7	4			
0.75	2.5			
0.8	2			

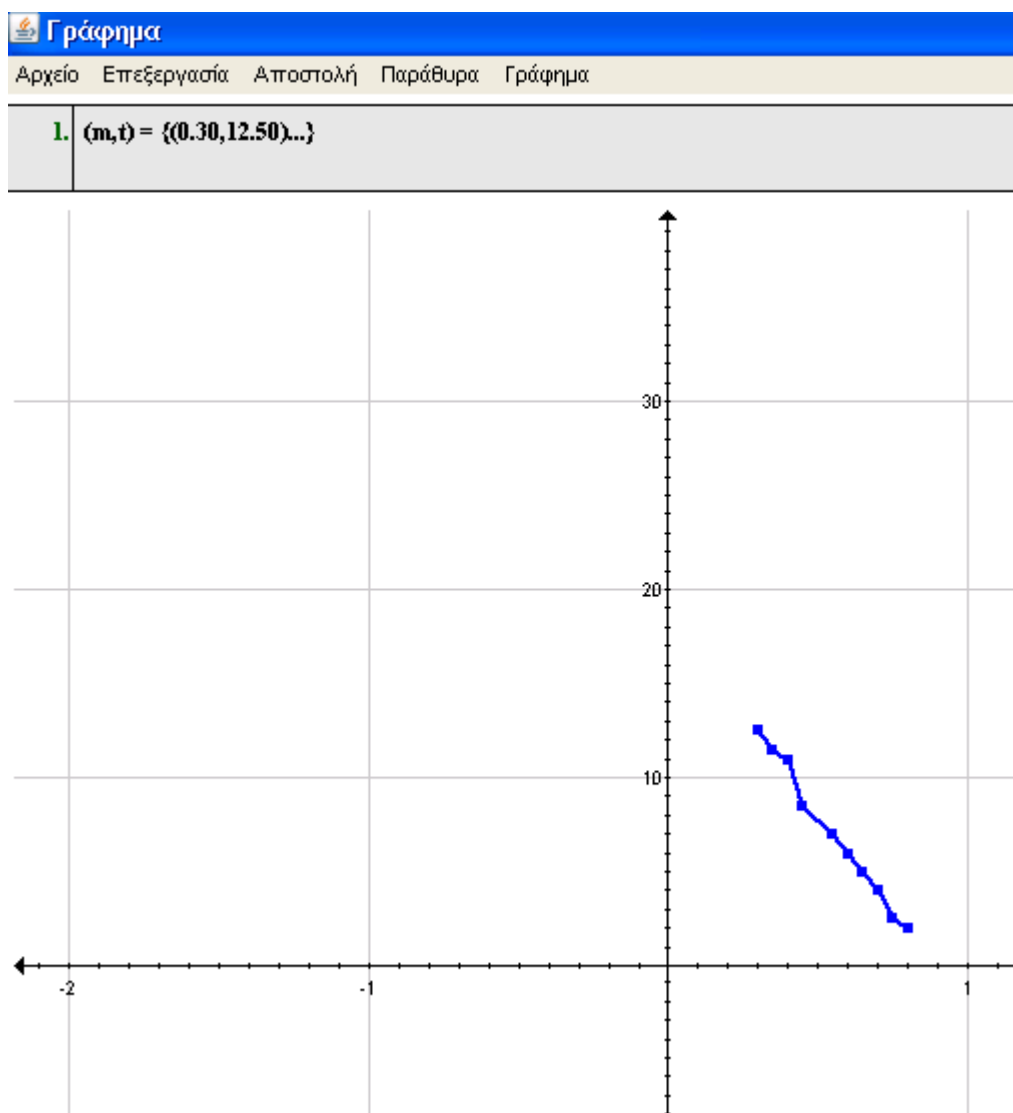
Μετά

Να στείλουν τα αντίστοιχα ζευγάρια τιμών (x , y) στο επίπεδο και να ελέγξουν αν αυτά πήγαν στο γράφημα. Αν δεν τα βλέπουν να αναρωτηθούν και να συζητήσουν με την ομάδα τους τη γνώμη τους για το τι συμβαίνει και τι πρέπει να αλλάξει για να τα δουν. (Αλλαγή κλίμακας)



B' ΦΑΣΗ

Όταν έχουν στο οπτικό τους πεδίο τα σημεία να ζητήσουν από το γράφημα "σύνδεση σημείων" και να συζητήσουν η γραμμή που τα ενώνει αν τους θυμίζει περισσότερο ευθεία ή καμπύλη?



Αν αυτή είναι ευθεία να πληκτρολογήσουν στο πλαίσιο συναρτήσεων ένα τύπο ευθείας τον πιο απλό. Οι μαθητές μπορεί να πληκτρολογήσουν την $t=m$, $t=-m$ ή κάτι άλλο. Να ζητήσουν >γράφημα > επιλογές γραφήματος > εμφάνιση μετασχηματισμών και έχοντας ως αφετηρία την ευθεία που πληκτρολόγησαν να προσεγγίσουν τη γραμμή που συνδέει τα σημεία. Να χρησιμοποιήσουν τα εργαλεία μετατόπισης



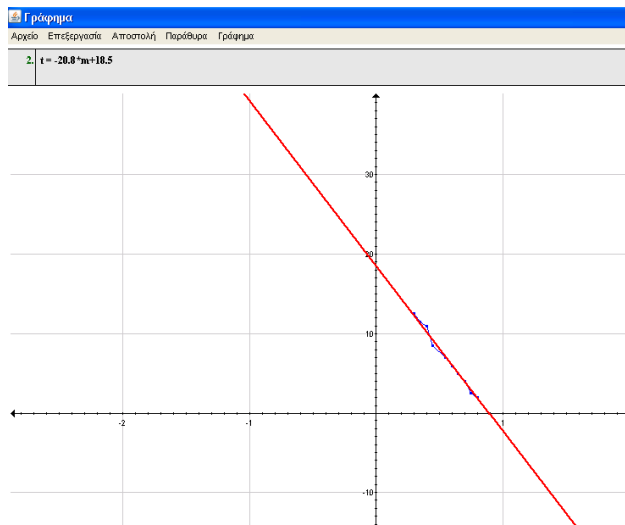
και αυξομείωσης




σε αυτήν την προσπάθεια.


Να σημειώσουν τον τύπο της παραπάνω ευθείας. Αναμενόμενο

$$t = -20.8m + 18.5$$



Να πληκτρολογήσουν στον πίνακα τον τύπο της ευθείας. Βάζοντας το  πάνω της θα ενημερωθούν αυτόματα από το λογισμικό οι αντίστοιχες τιμές της στήλης για την κάθε τιμή δόσης φαρμάκου.

Δίνεται και η ευκαιρία να συζητήσουν για το τι αντιπροσωπεύει ο πίνακας τιμών μιας συνάρτησης

Να βοηθήσουν τον ερευνητή ώστε χωρίς να πραγματοποιήσει πείραμα στο τι να αναμένει σε όσο αφορά το χρόνο αναισθησίας μετά από δόση φαρμάκου 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.5, 0.73, 0.9 και 1 mgr. Να παροτρύνει ο διδάσκων τους μαθητές να χρησιμοποιήσουν περισσότερους τρόπους όπως την αριθμομηχανή ή και το εργαλείο >γέμισμα πίνακα ή και να φτιάξουν ένα "κουμπί"  για τους υπολογισμούς αυτούς.



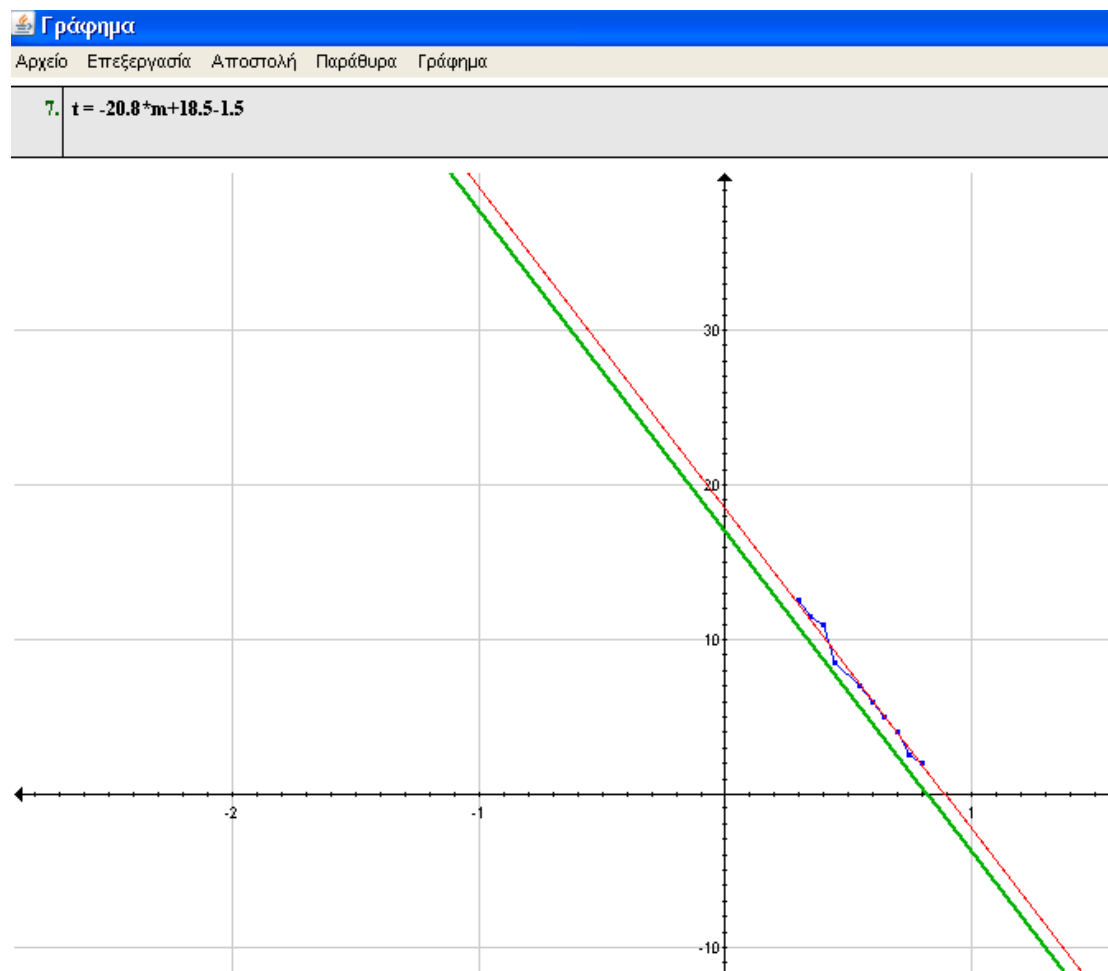
Γ ΄ΦΑΣΗ

Η ευθεία τέμνει τους άξονες και σε ποια σημεία? Τι σημαίνουν τα σημεία αυτά για το πείραμα και να δώσουν κάποια εξήγηση.

Να γράψουν ποιο είναι το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών στην παραπάνω συνάρτηση που έχουν.

Είναι μια καλή ευκαιρία να γίνει αντικείμενο διαπραγματεύσεων το τι σημαίνει για το πείραμα το σημείο τομής του γραφήματος της συνάρτησης με τον άξονα x και να απαντήσουν στο ερώτημα: Με πόση ποσότητα φαρμάκου πρέπει να εφοδιαστεί ο ερευνητής ώστε να εξασφαλίσει τη δυνατότητα 23 τουλάχιστον πειραματισμών ακόμη και πόσο θα του κοστίσει αν το φάρμακο έχει 120.000 ευρώ το κιλό?

Αν ένα νέο φάρμακο βελτιώνει το χρόνο αναισθησίας κατά 1.5 sec να βρουν τον τύπο της αντίστοιχης ευθείας και τα χρήματα που θα ωφεληθεί ο ερευνητής για την αγορά του φαρμάκου.



Να προβληματιστούν με το ερώτημα: Ο ερευνητής θέλει να αναισθητοποιήσει μια χελώνα σε χρόνο $t = 5.3 \text{ sec}$. Πόση θα είναι η απαιτούμενη ποσότητα φάρμακου? Να τον βοηθήσουν να έχει ένα τύπο υπολογισμού της δόσης όταν για την επέμβαση απαιτείται συγκεκριμένος χρόνος αναισθητοποίησης. Αν αυτό είναι μια νέα συνάρτηση να βρουν το πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών της, να τα συγκρίνουν και να τα αντιπαραβάλλουν με την αρχική.

Να κάνουν τις παρατηρήσεις τους και να διατυπώσουν κανόνες.

Αναφορά στο ρόλο και την κοινωνική ενορχήστρωση της τάξης:

Οι μαθητές κάθονται σε μικρές ομάδες των 2-3 ατόμων. Συνεργάζονται, συζητούν, πειραματίζονται, ερευνούν και αλληλεπιδρούν μεταξύ τους αλλά και με το λογισμικό. Διατυπώνουν κανόνες. Οι μαθητές ενθαρρύνονται από τον διδάσκοντα όταν κάνουν λάθη να αλλάζουν και να ξανά αλλάζουν μέχρι να ικανοποιούνται από το αποτέλεσμα.

5. Επέκταση της δραστηριότητας.

Σε καμπύλες της μορφής $y=ax^2$, $y=a(x-p)^2$, $y=ax^2+q$, $y=a(x-p)^2+q$
Δευτέρου βαθμού και μεγαλύτερου, σε συναρτήσεις μορφής
 $y= e^x$, $y=a e^x$, $y= a e^{bx}$, $y=a e^{bx} +c$
τριγωνομετρικές μορφής
 $y=p \sin x$, $y=p \sin ax$ $y=p \sin (ax+b)$, $y=p \sin (ax+b) +q$ κ.α

6. Βιβλιογραφία.

Το σχολικό βιβλίο Γ΄ Λυκείου Μαθηματικά και Στατιστική .