

Ηλεκτρονική Ξενάγηση

Περιεχόμενα

<i>Εισαγωγή</i>	2
<i>Μέρος 1</i>	2
Κατασκευή ενός πίνακα δεδομένων	3
Η εντολή Γέμισμα	3
Ονομασία στηλών και μεταβλητών	3
<i>Μέρος 2</i>	3
Εμφάνιση στατιστικών	4
Εντολή Διαφορά	4
Αποστολή δεδομένων σε Πίνακα	4
<i>Μέρος 3</i>	4
Αλλαγή κλίμακας στο Γράφημα	4
Γρήγορη αλλαγή κλίμακας	5
<i>Μέρος 4</i>	5
Σύνδεση σημείων	5
Επιλέγοντας μια συνάρτηση – πρότυπο	5
Το Ιστορικό Γραφήματος	6
<i>Μέρος 5</i>	6
Δημιουργία συμμετρικού	6
Κατακόρυφη αυξομείωση	6
Κατακόρυφη μετατόπιση	7
Οριζόντια αυξομείωση	7
<i>Μέρος 6</i>	7
Δειγματοληψία με χρήση μιας στήλης	7
Αποστολή σημείων πίσω στον Πίνακα	8
Απόκλιση του μοντέλου από τα δεδομένα	8
<i>Μέρος 7</i>	8
Παράθυρο Αριθμομηχανή	8
<i>Μέρος 8</i>	9
Κατασκευή κουμπιού	9
Σύνθεση συναρτήσεων	10
Η επιστήμη των Βαβυλωνίων	11

Εισαγωγή

Η Ηλεκτρονική Ξενάγηση είναι ένα πολύ χρήσιμο και ενδιαφέρον στοιχείο του λογισμικού που βοηθάει το νέο χρήστη να λάβει μία πρώτη εμπειρία των δυνατοτήτων του λογισμικού.

Η Ηλεκτρονική Ξενάγηση αποτελεί μια οπτικοακουστική εισαγωγή στο Function Probe με βασικό στόχο να εισαγάγει το χρήστη σε αρκετές από τις βασικές λειτουργίες του. Γι αυτό το σκοπό εμφανίζονται εικόνες των εργαλείων του λογισμικού που χρησιμοποιούνται για την επίλυση του προβλήματος και γίνεται η προσομοίωση της λειτουργίας.

Η Ηλεκτρονική Ξενάγηση θέτει ένα συγκεκριμένο πρόβλημα και παρουσιάζει τον τρόπο επίλυσής του με τη χρήση των εργαλείων του λογισμικού Function Probe. Συγκεκριμένα, θα γίνει η μαθηματική αναπαράσταση του φυσικού φαινομένου της μεταβολής της διάρκειας της ημέρας κατά το πέρασμα του χρόνου. Θα χρησιμοποιήσουμε πραγματικά δεδομένα για τη διάρκεια των ημερών ενός χρονικού διαστήματος (54 εβδομάδες) και στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τα εργαλεία του Function Probe, θα κατασκευάσουμε μια αλγεβρική σχέση που θα προσεγγίζει τα πραγματικά δεδομένα. Δηλαδή, από τα δεδομένα για τις 54 εβδομάδες θα κατασκευάσουμε μια συνάρτηση που θα δίνει τη διάρκεια οποιασδήποτε ημέρας οποιουδήποτε έτους.

Θα ήταν καλό, όταν παρακολουθείτε την Ηλεκτρονική Ξενάγηση, να έχετε ανοιχτό και το ίδιο το Function Probe και να εκτελείτε και εσείς τα βήματα που βλέπετε στην οθόνη σας! Με αυτό τον τρόπο θα μπορέσετε αφενός να εξοικειωθείτε με τη χρήση του λογισμικού, αφετέρου να δείτε και άλλες δυνατότητές του που δεν χρησιμοποιούνται στο συγκεκριμένο πρόβλημα.

Μέρος 1

Όλοι ξέρουμε πως το χειμώνα οι μέρες είναι μικρότερες από ότι το καλοκαίρι. Μάλιστα, όσο απομακρυνόμαστε από τον Ισημερινό προς το Βορά ή προς το Νότο, η διάρκεια της ημέρας μεταβάλλεται πολύ, έτσι ώστε κάποιες καλοκαιρινές μέρες στην Αρκτική ή την Ανταρκτική ο ήλιος δε δύει ποτέ!

Θα προσπαθήσουμε να πραγματοποιήσουμε μια μαθηματική περιγραφή αυτού του φυσικού φαινομένου, δηλαδή να κατασκευάσουμε μια αλγεβρική σχέση που να παρουσιάζει πώς μεταβάλλεται η διάρκεια της ημέρας με την πάροδο του χρόνου.

Η διάρκεια της ημέρας, (δηλαδή το χρονικό διάστημα ανάμεσα στην Ανατολή και τη Δύση του ήλιου) εξαρτάται από τον τόπο στον οποίο μένετε και από την εποχή του έτους. Η Αθήνα, για παράδειγμα, βρίσκεται σε 38 μοίρες Βόρειο γεωγραφικό πλάτος και 23 μοίρες Ανατολικό γεωγραφικό μήκος. Η διάρκεια της ημέρας στην Αθήνα διαφέρει κατά πολύ από τη διάρκεια της ημέρας στο Λονδίνο ($B51^\circ, \Delta 0^\circ 10'$) ή στην Αγία Πετρούπολη ($B60^\circ, A30^\circ$).

Από μια τοποθεσία στο Διαδίκτυο βρίσκουμε τις πληροφορίες που χρειαζόμαστε: την ώρα της Ανατολής, της Δύσης και της Μεσημβρίας για την πόλη της Αθήνας. Ξεκινάμε από την 21η Δεκεμβρίου, την πρώτη ημέρα του χειμώνα του έτους 1999 και βρίσκουμε τα στοιχεία για τις επόμενες 53 εβδομάδες, δηλαδή μέχρι το τέλος του 2000. Αποθηκεύουμε τα δεδομένα σε ένα αρχείο κειμένου.

Τα δεδομένα που πήραμε από το Διαδίκτυο παρουσιάζονταν με το συνηθισμένο τρόπο, δηλαδή 60 λεπτά η μια ώρα, αλλά για πρακτικούς λόγους τα μετατρέψαμε έτσι ώστε να έχουν δεκαδικό μέρος. Για παράδειγμα η ώρα **7:15** έγινε **7.25** και η ώρα **3:30** μ.μ. έγινε **15.50**. Έπρεπε να προσέξουμε ιδιαίτερα την αλλαγή της θερινής ώρας.

Κατασκευή ενός πίνακα δεδομένων

Το Function Probe μας επιτρέπει να δίνουμε ένα περιγραφικό όνομα σε κάθε στήλη του **Πίνακα**. Ονομάζουμε λοιπόν την πρώτη στήλη **Αριθμός Εβδομάδας**.

Χρησιμοποιώντας τις ράβδους αλλαγής μεγέθους στην πάνω δεξιά γωνία μιας στήλης, μπορούμε να αλλάξουμε το πλάτος της ...

...και στη συνέχεια να αλλάξουμε το ύψος του πλαισίου για το όνομα της στήλης με τη ράβδο αλλαγής μεγέθους στη δεξιά πλευρά του πίνακα.

Τώρα καθορίζουμε το όνομα της μεταβλητής της πρώτης στήλης. Την ονομάζουμε **x** (**x=x**) και στη συνέχεια εισαγάγουμε τιμές.

Στο σημείο αυτό είναι σκόπιμο να αναλογιστούμε τον τρόπο με τον οποίο θέλουμε να αριθμήσουμε τα δεδομένα μας. Δηλαδή, αν η αρίθμηση των εβδομάδων θα ξεκινάει από την τιμή 1 ή την τιμή 0.

Επιλέγουμε αρίθμηση που να ξεκινάει από το μηδέν, ώστε όταν αργότερα σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση που αντιστοιχεί στα δεδομένα αυτά, η καμπύλη μας να ξεκινάει από τον άξονα των ψ ($\psi=y$). Με αυτόν τον τρόπο θα δείτε ότι απλοποιείται ένας μετασχηματισμός που θα πραγματοποιηθεί αργότερα.

Η εντολή Γέμισμα

Μπορούμε να εισαγάγουμε αυτές τις τιμές με την εντολή **Γέμισμα**. Κατ' αρχήν κάνουμε κλικ με το δείκτη στην περιοχή δεδομένων της στήλης **x**.

Πηγαίνουμε στο μενού **Πίνακας** και επιλέγουμε την εντολή **Γέμισμα**. Το παράθυρο διαλόγου της εντολής αυτής μας επιτρέπει να πραγματοποιήσουμε σχεδόν κάθε είδους **Γέμισμα**.

Αυτή τη φορά θέλουμε απλώς να συμπληρώσουμε τον αριθμό της εβδομάδας από το 0 ως το 53, με κάθε καταχώρηση να προκύπτει από την προηγούμενή της συν ένα.

Όταν κάνουμε κλικ στο κουμπί **OK**, το Function Probe θα μας προειδοποιήσει ότι πρόκειται να κατασκευάσουμε μια ακολουθία που απειρίζεται. Εμείς κάνουμε κλικ στο κουμπί **Ναι** για να επιτρέψουμε στο πρόγραμμα να συμπληρώσει περισσότερα από 50 δεδομένα, αφού 50 είναι ο προκαθορισμένος αριθμός δεδομένων για την εντολή **Γέμισμα**. Και έτσι ολοκληρώνεται η πρώτη στήλη.

Ονομασία στηλών και μεταβλητών

Τώρα μπορούμε να κατασκευάσουμε και τις υπόλοιπες στήλες των δεδομένων.

Ονομάζουμε τη δεύτερη και την τρίτη στήλη **Ανατολή** και **Δύση**, και επικολλούμε τα αντίστοιχα δεδομένα από το αρχείο κειμένου στο οποίο τα είχαμε αποθηκεύσει.

Μέρος 2

Στη συνέχεια πρέπει να βρούμε έναν τρόπο για να μοντελοποιήσουμε τη διάρκεια της ημέρας. Το ερώτημα είναι πώς μπορούμε να καταλήξουμε από τα δεδομένα μας, τα οποία αφορούν τις 54 ημέρες ενός συγκεκριμένου χρονικού διαστήματος, σε μια πρόβλεψη για οποιαδήποτε ημέρα, οποιουδήποτε έτους.

Εξαιτίας της μορφής των δεδομένων με τα οποία δουλεύουμε, αρχικά αναπτύσσουμε ένα μοντέλο που προβλέπει τη διάρκεια της πρώτης ημέρας κάθε εβδομάδας ενός έτους ξεκινώντας από την 21η Δεκεμβρίου 1999.

Κατασκευάζουμε μια νέα στήλη που λέγεται **Y** (**Y=U**), η οποία θα περιλαμβάνει τα δεδομένα για τη διάρκεια της ημέρας. Η διάρκεια της ημέρας είναι ίση με τη διαφορά της

στήλης **Δύση** μείον τη στήλη **Ανατολή**. Έτσι, στην τέταρτη στήλη, την οποία ονομάσαμε **Διάρκεια σε ώρες**, εισαγάγουμε τον τύπο **U=O-o** και πατάμε το πλήκτρο **Enter**.

Μόλις εισαγάγουμε τον τύπο της καινούριας μεταβλητής και πατήσουμε το πλήκτρο **Enter**, η στήλη συμπληρώνεται αυτόματα.

Εμφάνιση στατιστικών

Πριν προχωρήσουμε στη γραφική αναπαράσταση, ας δούμε τι μπορούμε να μάθουμε από τους ίδιους τους αριθμούς και τις συσχετίσεις ανάμεσα στα δεδομένα. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κάποια από τα εργαλεία του **Πίνακα**. Κάνουμε κλικ στη στήλη **Διάρκεια σε ώρες** και επιλέγουμε την εντολή **Εμφάνιση στατιστικών** του μενού **Πίνακας**.

Από το παράθυρο διαλόγου μπορούμε να δούμε ότι η μικρότερη διάρκεια ημέρας στο δείγμα είναι 9.53 ώρες και η μεγαλύτερη 14.80 ώρες. Η μέση διάρκεια ημέρας είναι 12.10 ώρες. Κλείνουμε αυτό το παράθυρο διαλόγου κάνοντας κλικ στο κουμπί **Έγινε**.

Εντολή Διαφορά

Μπορεί να σας έχει δημιουργηθεί η απορία για το αν η διάρκεια της ημέρας μεταβάλλεται κατά το ίδιο ποσό κάθε μέρα με την πάροδο του έτους. Μπορούμε να το εξακριβώσουμε από τα δεδομένα χρησιμοποιώντας την εντολή **Διαφορά**. Κάνουμε κλικ στη στήλη **Διάρκεια σε ώρες** και επιλέγουμε την εντολή **Διαφορά** από το μενού **Πίνακας**.

Παίρνουμε μια στήλη **ΔU** η οποία εμφανίζει τη διαφορά ανάμεσα στη διάρκεια δύο διαδοχικών δεδομένων. Επειδή η πρώτη στήλη περιέχει στοιχεία που ισαπέχουν μεταξύ τους (εβδομάδες), η στήλη διαφοράς μάς επιβεβαιώνει την υποψία ότι μερικές φορές κατά τη διάρκεια του έτους η διάρκεια της ημέρας αυξομειώνεται με μεταβαλλόμενο ρυθμό.

Αποστολή δεδομένων σε Πίνακα

Θέλουμε τώρα να δούμε τα δεδομένα μας σε μια γραφική παράσταση.

Για να το κάνουμε αυτό, μετακινούμε τα εικονίδια **x (x)** και **ψ (y)** της σειράς εικονιδίων του **Πίνακα** στις στήλες που θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε για να κατασκευάσουμε το γράφημα. Τοποθετούμε το εικονίδιο **x** πάνω από τη στήλη με τον αριθμό της εβδομάδας και το εικονίδιο **y** πάνω από τη στήλη με τη διάρκεια της ημέρας.

Στη συνέχεια, από το μενού **Αποστολή** επιλέγουμε την εντολή **Σημεία σε Γράφημα**.

Κάνοντας κλικ πάνω στο παράθυρο **Γράφημα** το ενεργοποιούμε για να δούμε τη γραφική παράσταση.

Μέρος 3

Αλλαγή κλίμακας στο Γράφημα

Κοιτώντας το **Γράφημα**, πιθανότατα σκεφτήκατε ότι τα σημεία σας χάθηκαν!

Ένας τρόπος για να τα δείτε είναι να κάνετε κλικ πάνω στις τρεις τελίτσες δίπλα στο ζεύγος των μεταβλητών που βρίσκονται στο **Πλαίσιο Τύπων** του παραθύρου **Γράφημα**. Θα δείτε να αλλάζουν οι συντεταγμένες που εμφανίζονται. Ακόμα όμως δεν μπορείτε να δείτε τα σημεία.

Το Function Probe δεν αλλάζει την κλίμακα των γραφημάτων του αυτόματα. Αντίθετα, πρέπει εμείς να σκεφτούμε τι αλλαγές θέλουμε να κάνουμε στην κλίμακα και στη συνέχεια να βρούμε τον κατάλληλο τρόπο για να τις πραγματοποιήσουμε.

Επομένως, το πρώτο πράγμα που θα κάνουμε είναι να αλλάξουμε την κλίμακα στο **Γράφημα** ώστε να μπορούμε να δούμε όλα τα σημεία. Επιλέγουμε την εντολή **Αλλαγή κλίμακας** από το μενού **Γράφημα** και με τη βοήθεια αυτού του παραθύρου διαλόγου προσαρμόζουμε τις κλίμακες και τις μονάδες των αξόνων.

Από τα δεδομένα γνωρίζουμε ότι ο αριθμός των εβδομάδων βρίσκεται πάνω στον άξονα των x και ότι παίρνει τιμές από 0 έως 53. Για να δούμε ολόκληρο το γράφημα, κάνουμε το εξής:

Θέτουμε το ελάχιστο x να είναι **-4**. Μετά πατάμε το πλήκτρο **Tab** και θέτουμε την τιμή **55** για το μέγιστο x . Θέτουμε **-2** ως την ελάχιστη τιμή του y και **20** τη μέγιστη. Τέλος, ορίζουμε την απόσταση των γραμμών πλέγματος και στους δύο άξονες στο 5, κάνουμε κλικ στο κουμπί **OK** και ρίχνουμε άλλη μια ματιά στο γράφημα.

Γρήγορη αλλαγή κλίμακας

Μπορείτε επίσης να ενεργοποιήσετε και την **Γρήγορη αλλαγή κλίμακας**. Από το μενού **Γράφημα** επιλέγετε την εντολή **Επιλογές Γραφήματος** και στη συνέχεια ενεργοποιείτε τη ρύθμιση **Γρήγορη αλλαγή κλίμακας**. Η ρύθμιση αυτή σας επιτρέπει να καθορίζετε τα ελάχιστα και τα μέγιστα των περιοχών των αξόνων που εμφανίζονται.

Παρατηρήστε τα μικρά κουτάκια που βρίσκονται στα μέσα των τεσσάρων πλευρών της **Προβολής Γραφημάτων**. Αν κάνετε κλικ πάνω σε οποιοδήποτε από αυτά, ένα πλαίσιο κειμένου ανοίγει. Μπορείτε να αλλάξετε την κλίμακα πληκτρολογώντας μια τιμή μέσα σε αυτό το πλαίσιο και πατώντας το πλήκτρο **Enter**. Ξανακάνετε κλικ στο κουτάκι για να κλείσει το πλαίσιο στο οποίο εισαγάγατε την τιμή.

Μέρος 4

Σύνδεση σημείων

Στη συνέχεια, πηγαίνουμε στο παράθυρο **Γράφημα** και επιλέγουμε την εντολή **Σύνδεση σημείων**.

Η καμπύλη που σχηματίζεται από τα σημεία δεδομένων μοιάζει πολύ με τμήμα περιοδικής συνάρτησης.

Επιλέγοντας μια συνάρτηση – πρότυπο

Πρέπει να σκεφτούμε για λίγο τη μορφή της συνάρτησης - πρότυπο που θα επιλέξουμε για να ξεκινήσουμε. Βρισκόμαστε ανάμεσα σε δύο καμπύλες: την ημιτονοειδή και τη συνημιτονοειδή. Όποια και αν διαλέξουμε θα μας οδηγήσει στο ίδιο αποτέλεσμα. Εδώ θα δουλέψουμε με τη συνημιτονοειδή, καθώς η ημιτονοειδής καμπύλη απαιτεί έναν παραπάνω μετασχηματισμό.

Για να εισαγάγουμε τη συνημιτονοειδή καμπύλη κάνουμε κλικ στο εικονίδιο νέου τύπου **y=...** στην **Εργαλειοθήκη**.

Στο **Πλαίσιο Τύπων** του παραθύρου **Γράφημα** εμφανίζεται **Y= (U=)**. Πληκτρολογήστε τον τύπο της συνάρτησης του συνημιτόνου [**cos(x)**] και πατήστε το πλήκτρο **Enter**, για να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης.

Στο **Πλαίσιο Τύπων** εμφανίζεται **U=** γιατί τα αρχικά μας δεδομένα είχαν σταλεί από τις στήλες ενός πίνακα οι οποίες ονομάζονταν U και x αντίστοιχα. Επομένως, το **Γράφημα** περιμένει να εισαγάγουμε τύπους που χρησιμοποιούν αυτές τις μεταβλητές.

Ο χώρος στον οποίο δακτυλογραφείτε τον τύπο λέγεται **Πλαίσιο Τύπων και Ιστορικού**. Μπορείτε να επεξεργαστείτε έναν τύπο επιλέγοντάς τον (ώστε να φωτιστεί) και πληκτρολογώντας τις αλλαγές, που θέλετε. Για παράδειγμα, μπορείτε εύκολα να

μετατρέψετε το $Y=\sin x$ [$U=\cos(x)$] σε $Y=\sin(2x)$ [$U=\cos(2x)$] με απλές τεχνικές επεξεργασίας κειμένου.

Το Ιστορικό Γραφήματος

Η νέα συνάρτηση που κατασκευάσαμε θα αριθμηθεί αυτόματα στην περίπτωση που είναι ενεργοποιημένη η ρύθμιση **Αυτόματος ορισμός αντικειμένων** στο παράθυρο διαλόγου **Επιλογές παραθύρου Γραφήματος**. Μπορούμε εύκολα να επιστρέψουμε στην προηγούμενη συνάρτηση είτε κάνοντας κλικ πάνω στο γράφημά της, είτε κάνοντας κλικ στο άνω βέλος στο δεξί μέρος στο **Πλαίσιο Τύπων**.

Το βέλος αυτό θα εμφανίσει το ιστορικό όλων των προηγούμενων τύπων. Ακόμα και αφού έχουμε διαγράψει έναν τύπο, αυτός θα συνεχίζει να εμφανίζεται στο Ιστορικό, ώστε να τηρείται ένα ακριβές αρχείο όλων των ενεργειών που έχουμε πραγματοποιήσει.

Για να επιστρέψουμε στο πρόβλημά μας, παρατηρούμε ότι η καμπύλη $Y=2\sin(x)$ [$U=2\cos(x)$] προσεγγίζει περισσότερο τη μορφή της καμπύλης των δεδομένων, γιατί το πλάτος της καμπύλης είναι μεγαλύτερο του ένα. Μπορούμε επομένως να ξεκινήσουμε τη διαδικασία προσαρμογής της καμπύλης του συνημιτόνου στα δεδομένα, κατασκευάζοντας παράλληλα ένα μαθηματικό μοντέλο για αυτά.

Αυτό θα το κάνουμε με τα εργαλεία οπτικών μετασχηματισμών του Function Probe.

Μέρος 5

Δημιουργία συμμετρικού

Παρατηρούμε ότι για να προσαρμοστεί η καμπύλη του συνημιτόνου στα δεδομένα θα πρέπει να στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω μετά από το σημείο της τομής της με τον άξονα των y .

Επομένως, αποφασίζουμε να δημιουργήσουμε το συμμετρικό της καμπύλης. Χρησιμοποιούμε το εικονίδιο συμμετρίας και επιλέγουμε συμμετρία ως προς τον άξονα των x . Κάνουμε πρώτα κλικ στο κουμπί **OK** και στη συνέχεια πατάμε το πλήκτρο **Enter**.

Παρότι στο **Πλαίσιο Τύπων** αναγράφεται ο καινούριος τύπος, μπορείτε να απενεργοποιήσετε την επιλογή **Εμφάνιση μετασχηματισμών** από τις **Επιλογές Γραφήματος** και να δοκιμάσετε τον εαυτό σας, αναπτύσσοντας τον τύπο μόνοι σας.

Με μια γρήγορη ματιά στο **Ιστορικό** βλέπουμε ότι έχουν καταγραφεί όλοι οι μετασχηματισμοί που έχουμε πραγματοποιήσει μέχρι τώρα.

Κατακόρυφη αυξομείωση

Από προηγούμενως θυμόμαστε ότι η μεγαλύτερη διάρκεια ημέρας είναι 14.80 ώρες και η μικρότερη 9.53 ώρες. Από αυτό καταλαβαίνουμε ότι το εύρος της συνημιτονοειδούς καμπύλης πρέπει να είναι το μισό της διαφοράς (14.80-9.53), δηλαδή 2.635.

Επιλέγουμε το εικονίδιο αυξομείωσης και ειδικά την αυξομείωση στον κατακόρυφο άξονα.

Πατάμε το πλήκτρο **Enter** για να αφήσουμε τη Γραμμή Άγκυρας στον άξονα των x και μετακινούμε το δείκτη κατά μήκος της καμπύλης μέχρι να εμφανιστεί το πλαίσιο ανοίγματος. Στη συνέχεια σύρουμε την καμπύλη έως ότου εμφανιστεί στο **Πλαίσιο Τύπων** ένας παράγοντας ανοίγματος ίσος με 2.63.

Όταν αφήσουμε το πλήκτρο του ποντικιού, το Function Probe θα κατασκευάσει τη νέα γραφική παράσταση.

Με μια γρήγορη ματιά στο **Ιστορικό** βλέπουμε ότι έχει καταγραφεί ποια ενέργεια πραγματοποιήθηκε σε ποια καμπύλη.

Κατακόρυφη μετατόπιση

Χρειάζεται ακόμα να μεταφέρουμε την καμπύλη προς τα πάνω, εκεί που βρίσκονται τα δεδομένα. Επιλέγουμε, λοιπόν, το εικονίδιο μετατόπισης και συγκεκριμένα την κατακόρυφη μετατόπιση.

Σύρουμε την καμπύλη προς τα πάνω μέχρι που το ελάχιστό της να συμπίπτει με την ελάχιστη διάρκεια ημέρας στα δεδομένα. Πριν αφήσουμε το πλήκτρο του ποντικιού μπορούμε να ελέγξουμε με το μάτι εάν ταυτίζονται τα μέγιστα.

Τώρα πια η κατακόρυφη θέση και το εύρος της συνάρτησης αποτελούν μια πολύ καλή προσέγγιση των δεδομένων.

Το τελευταίο βήμα στην κατασκευή αυτού του μαθηματικού μοντέλου είναι η ταύτιση της περιόδου του μοντέλου με αυτή των δεδομένων και αξίζει τον κόπο να αναλογιστούμε τον τρόπο με τον οποίο θα την πετύχουμε.

Η περίοδος μιας καμπύλης είναι το μήκος ανάμεσα σε δύο διαδοχικές ελάχιστες τιμές της και στη συνημιτονοειδή καμπύλη που έχουμε μπροστά μας η περίοδος είναι περίπου 6.28 (ή 2π).

Οριζόντια αυξομείωση

Κάνουμε κλικ ξανά στο εικονίδιο αυξομείωσης, αλλά αυτή τη φορά επιλέγουμε οριζόντια αυξομείωση. Για να αφήσουμε τη Γραμμή Άγκυρας στον άξονα των y πατάμε το πλήκτρο **Enter**. Κάνουμε κλικ πάνω στην καμπύλη και κρατάμε πατημένο το αριστερό πλήκτρο του ποντικιού, για να εμφανιστεί ένα πλαίσιο ανοίγματος. Πατώντας το ποντίκι σύρουμε την καμπύλη οριζόντια προσαρμόζοντάς την όσο καλύτερα μπορούμε στα δεδομένα.

Ο τύπος στο **Πλαίσιο Ιστορικού** και η καμπύλη στην **Προβολή Γραφημάτων** αναπαριστούν το μοντέλο μας και παρουσιάζουν τη διάρκεια της ημέρας ως συνάρτηση του αριθμού της εβδομάδας.

Πριν ολοκληρώσουμε την εργασία μας, πρέπει να εκτιμήσουμε την ακρίβεια του μοντέλου μας. Τα εργαλεία του Function Probe για τη δειγματοληψία σημείων από καμπύλες είναι ιδανικά για αυτήν τη δουλειά.

Μέρος 6

Δειγματοληψία με χρήση μιας στήλης

Κατ' αρχήν ενεργοποιούμε το παράθυρο **Πίνακας** κάνοντας κλικ πάνω του και επιλέγουμε τη στήλη που αναπαριστά τις εβδομάδες. Από την καμπύλη που κατασκευάσαμε θα πάρουμε ως δείγμα ένα σύνολο σημείων, τα οποία θα έχουν για τετμημένες τις τιμές αυτής της στήλης.

Κάνουμε ξανά κλικ πάνω στο **Γράφημα** για να το ενεργοποιήσουμε και επιλέγουμε την καμπύλη του μοντέλου μας κάνοντας κλικ πάνω της.

Οι ενέργειες του Function Probe που αφορούν σημεία και σύνολα σημείων ελέγχονται από το εικονίδιο δείκτη σημείου και το αναπτυσσόμενο μενού του.

Από το αναπτυσσόμενο μενού επιλέγουμε το τρίτο εικονίδιο, για να παράξουμε ένα δείγμα σημείων πάνω στην καμπύλη.

Στο παράθυρο διαλόγου που εμφανίζεται επιλέγουμε τη μέθοδο δειγματοληψίας που λέγεται **επιλεγμένη στήλη του Πίνακα**, στη συνέχεια κάνουμε κλικ στο κουμπί **OK**...

...και τα σημεία εμφανίζονται πάνω στην καμπύλη.

Αποστολή σημείων πίσω στον Πίνακα

Για να στείλουμε αυτό το νέο σύνολο σημείων στο παράθυρο **Πίνακας**, κάνουμε κλικ στο εικονίδιο επιλογής, επιλέγουμε το σύνολο σημείων και ενεργοποιούμε την εντολή **Σημεία σε Πίνακα** από το μενού **Αποστολή**.

Το Function Probe μας προειδοποιεί ότι υπάρχουν ήδη στήλες με τα ονόματα **Y (Y=U)** και **X (X=x)**, οι οποίες θα απενεργοποιηθούν.

Απόκλιση του μοντέλου από τα δεδομένα

Ενεργοποιούμε ξανά το παράθυρο **Πίνακας**. Τώρα μπορούμε να συγκρίνουμε την πραγματική διάρκεια των ημερών με αυτήν που έχουμε προβλέψει με το μοντέλο μας και να διαπιστώσουμε έτσι πόσο ακριβές είναι αυτό.

Αν θέλουμε να μετρήσουμε τις αποκλίσεις, μπορούμε να ενεργοποιήσουμε ξανά την αρχική στήλη της διάρκειας των ημερών. Κάνουμε κλικ στην αρχική στήλη U (που τώρα είναι ανενεργή) και επιλέγουμε την εντολή **Ενεργοποίηση στήλης** από το μενού **Πίνακας**.

Το λογισμικό μας προειδοποιεί ότι υπάρχει ήδη μια άλλη στήλη με την ίδια μεταβλητή. Όταν πατήσουμε το κουμπί **OK**, απαλείφεται το όνομα της μεταβλητής **U** και ενεργοποιείται η στήλη. Πρέπει να ονομάσουμε ξανά τη στήλη. Χρησιμοποιούμε τον αρχικό τύπο, θέτοντας στη θέση του **U** ένα μικρό γράμμα **u** και γράφουμε **u=O-o**.

Σε μια νέα στήλη πληκτρολογούμε τον τύπο **A=U-u**, για να παράξουμε τη διαφορά ανάμεσα στα δεδομένα και το δείγμα από την καμπύλη-μοντέλο. Θυμηθείτε ότι αυτό μπορούμε να το κάνουμε απ' ευθείας, γιατί οι τετμημένες x των δεδομένων και του δείγματος είναι οι ίδιες.

Πατώντας το πλήκτρο **Enter** μπορούμε να δούμε την απόκλιση ανάμεσα στη διάρκεια της ημέρας, που είχαμε προβλέψει και την πραγματική για κάθε εβδομάδα.

Φαίνεται ότι το μοντέλο είναι ένα αρκετά καλό εργαλείο για την πρόβλεψη της διάρκειας της ημέρας.

Μέρος 7

Παράθυρο Αριθμομηχανή

Από το πεδίο ορισμού του μοντέλου που έχουμε κατασκευάσει με τον **Πίνακα** και το **Γράφημα**, είναι φανερό ότι μπορούμε να προβλέψουμε τη διάρκεια μιας μόνο ημέρας για κάθε εβδομάδα. Αναρωτιόμαστε, λοιπόν, πώς μπορούμε να προβλέψουμε τη διάρκεια οποιασδήποτε ημέρας του έτους ξεκινώντας από τα δεδομένα για τη διάρκεια μιας ημέρας για κάθε εβδομάδα.

Πρόκειται για μια επέκταση του αρχικού μας προβλήματος, κάτι που μπορεί να συμβεί πολύ συχνά όταν δουλεύουμε με σύνθετα προβλήματα που βασίζονται σε καταστάσεις του 'πραγματικού κόσμου'. Για να τα βγάλουμε πέρα με αυτή τη νέα πρόκληση, χρησιμοποιούμε το παράθυρο **Αριθμομηχανή** και κατασκευάζουμε νέα κουμπιά. Στην πραγματικότητα θα ορίσουμε μια νέα συνάρτηση.

Αρχικά κατασκευάζουμε ένα κουμπί που προβλέπει τη διάρκεια της ημέρας για την πρώτη ημέρα κάθε εβδομάδας. Δηλαδή, απλώς ορίζουμε ένα κουμπί για το μοντέλο που κατασκευάσαμε προηγουμένως στο **Γράφημα**.

Μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα κουμπί εισαγάγοντας ένα συγκεκριμένο υπολογισμό. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι υπολογίζουμε τη διάρκεια της ημέρας κατά τη δέκατη εβδομάδα των δεδομένων.

Ακολουθούμε την παρακάτω σειρά πληκτρολόγησης στην **Αριθμομηχανή**, προσέχοντας να τοποθετούμε παρενθέσεις όπου είναι αναγκαίο, αφού πρέπει να χρησιμοποιείται σωστή αλγεβρική σύνταξη.

(αριστερή παρένθεση

10 δέκα

* επί

.12 τελεία δώδεκα

) δεξιά παρένθεση

cosx συνημίτονο

+/- αλλαγή προσήμου

* επί

2.63 δύο τελεία έξι

+ συν

12.14 δώδεκα τελεία δεκατέσσερα

= ίσον

Μόλις ολοκληρώσουμε την εισαγωγή του υπολογισμού, ελέγχουμε το αποτέλεσμα για να βεβαιωθούμε ότι ταυτίζεται με αυτό που βλέπουμε στα παράθυρο **Γράφημα** και **Πίνακας**.

Στο παράθυρο **Πίνακας** η διάρκεια της ημέρας κατά τη δέκατη εβδομάδα είναι 11.33 ώρες, το οποίο βρίσκεται πολύ κοντά στις 11.19 ώρες, την τιμή που προβλέπει το μοντέλο μας. Δηλαδή, η τιμή που δίνει η **Αριθμομηχανή** ταιριάζει με την τιμή του δείγματος για την 10η εβδομάδα μετά την 21η Δεκεμβρίου.

Μέρος 8

Κατασκευή κουμπιού

Για να κατασκευάσουμε το καινούριο κουμπί επιλέγουμε την εντολή **Κατασκευή κουμπιού** από το μενού **Αριθμομηχανή** και στη συνέχεια φωτίζουμε τον αριθμό '10' πατώντας και σύροντας το δείκτη του ποντικιού πάνω του. Η τιμή που θα εισαγάζεται στο νέο κουμπί θα είναι ο αριθμός της εβδομάδας.

Κάνουμε κλικ στο κουμπί με το ερωτηματικό και το 10 αντικαθίσταται από αυτό. Επιθεωρούμε τη σειρά για να βεβαιωθούμε ότι είναι αυτή που θέλουμε, κάνουμε κλικ στο κουμπί **OK** και ονομάζουμε το νέο κουμπί.

Αποφασίζουμε να του δώσουμε το όνομα **Διάρκεια Ημέρας** και κάνουμε ξανά κλικ στο κουμπί **OK**. Το νέο κουμπί **Διάρκεια Ημέρας** εμφανίζεται στις σειρές κουμπιών κάτω από το πληκτρολόγιο της **Αριθμομηχανής**. Στο Πλαίσιο Αποτελεσμάτων της **Αριθμομηχανής** εμφανίζεται το όνομα 'B1', το οποίο είναι το προκαθορισμένο όνομα που δίνει το λογισμικό.

Με αυτόν τον τρόπο παίρνουμε ένα κουμπί, που υπολογίζει τη διάρκεια της ημέρας από τον αριθμό της εβδομάδας του έτους ξεκινώντας από τις 21 Δεκεμβρίου. Το κουμπί αυτό αποτελεί την αλγεβρική έκφραση του μοντέλου, που κατασκευάσαμε νωρίτερα στο παράθυρο **Γράφημα**.

Επιστρέφοντας στο **Γράφημα**, χρησιμοποιούμε αυτό το νέο κουμπί για να δείξουμε ότι παράγει την ίδια συνάρτηση, που κατασκευάσαμε νωρίτερα μετασχηματίζοντας τη συνημιτονοειδή καμπύλη: στο **Πλαίσιο Τύπων** εισαγάγουμε $Y=B1x$ [$U=B1x$].

Σύνθεση συναρτήσεων

Τώρα θα θέλαμε να υπολογίσουμε τη διάρκεια της ημέρας για οποιαδήποτε ημέρα του έτους. Υπάρχουν περισσότεροι από ένας τρόποι για να το πετύχουμε αυτό. Εμείς πρόκειται να σχεδιάσουμε ένα δεύτερο κουμπί στο παράθυρο **Αριθμομηχανή** και να χρησιμοποιήσουμε και τα δύο για να κάνουμε μια σύνθεση συναρτήσεων.

Ο συλλογισμός μας είναι ο εξής:

--Το κουμπί B1 μας δίνει τη διάρκεια της ημέρας ως συνάρτηση του αριθμού της εβδομάδας

--Αν ξέρουμε τον αριθμό οποιασδήποτε ημέρας του έτους (ξεκινώντας από την 21 Δεκεμβρίου ως ημέρα 0), τότε μπορούμε να τον μετατρέψουμε σε αριθμό εβδομάδας διαιρώντας τον με το 7. Αποφασίζουμε, λοιπόν, να κατασκευάσουμε ένα νέο κουμπί για να κάνει αυτήν τη δουλειά.

-- Χρησιμοποιούμε το αποτέλεσμα που εξάγει το κουμπί αυτό ως καταχώρηση για το πρώτο κουμπί που κατασκευάσαμε.

Να ένας ακόμα υπολογισμός στην **Αριθμομηχανή**, που μας βολεύει να τον μετατρέψουμε σε κουμπί: επιλέγουμε τον αριθμό μιας ημέρας και τον διαιρούμε με το 7. Για παράδειγμα, για να πάρουμε τον αριθμό εβδομάδας που αντιστοιχεί στην 40ή ημέρα, διαιρούμε το 40 με το 7.

Στη συνέχεια, πατάμε και σύρουμε το δείκτη πάνω στον αριθμό 40 και τον αντικαθιστούμε με το ερωτηματικό. Με αυτόν τον τρόπο το όρισμα του καινούριου κουμπιού B2 θα είναι ο αύξων αριθμός της ημέρας του έτους. Είναι πρακτικό τα κουμπιά να ονομάζονται ανάλογα με το ρόλο τους. Αυτό θα το ονομάσουμε **Ημέρα σε Εβδομάδα**.

Τώρα διαθέτουμε δύο συναρτήσεις, που μας επιτρέπουν να προβλέψουμε τη διάρκεια οποιασδήποτε ημέρας. Χρησιμοποιούμε και τα δύο νέα κουμπιά για να συνθέσουμε μια συνάρτηση της οποίας η καταχώρηση είναι **Αριθμός Ημέρας**.

Στη σύνθεση συναρτήσεων το αποτέλεσμα της μιας συνάρτησης χρησιμοποιείται ως καταχώρηση για την επόμενη. Στην περίπτωση μας, ο αύξων αριθμός της ημέρας είναι η καταχώρηση για το κουμπί B2. Το αποτέλεσμα που δίνει το κουμπί B2 είναι ένας δεκαδικός, που περιγράφει τον αριθμό της εβδομάδας αντιστοιχώντας τον σε αριθμό ημέρας. Αυτή η τιμή με τη σειρά της αποτελεί την καταχώρηση για το κουμπί B1.

Επομένως, για να βρούμε τη διάρκεια της ημέρας 180 στην **Αριθμομηχανή**, πληκτρολογούμε 180, κάνουμε κλικ στο κουμπί B2, μετά στο κουμπί B1 και στη συνέχεια στο ίσον, για να πάρουμε περίπου 14.77.

Πίσω στο **Πλαίσιο Τύπων του Γραφήματος**, εισαγάγουμε έναν τύπο που πρέπει να μας εμφανίζει τη διάρκεια της ημέρας ως συνάρτηση του αριθμού της. Η σύνταξη στο παράθυρο **Γράφημα** διαφέρει από τη σύνταξη στο παράθυρο **Αριθμομηχανή**.

Η ανεξάρτητη μεταβλητή της νέας σύνθεσης συναρτήσεων είναι ο αύξων αριθμός της ημέρας σε ένα έτος.

Για να φανούν καλύτερα τα πράγματα, προσθέτουμε ένα καινούριο παράθυρο **Γράφημα**, το οποίο ονομάζεται **Γράφημα Β**. Αλλάζουμε επίσης την κλίμακά του για να το φέρουμε περίπου στις διαστάσεις του πρώτου παραθύρου γραφημάτων.

Εισαγάγουμε $\psi = B1(B2x)$ [$y = B1(B2x)$] αναλογιζόμενοι ότι:

- 1) Το B2 θα μετατρέψει τον αριθμό της ημέρας του έτους σε ένα δεκαδικό. Το ακέραιο μέρος θα αντιστοιχεί στον αριθμό της εβδομάδας.
- 2) Το x είναι το όρισμα του B2.
- 3) Το αποτέλεσμα του B2 είναι το όρισμα της συνάρτησης B1.
- 4) Το ζητούμενο είναι η διάρκεια της ημέρας το οποίο είναι το αποτέλεσμα της συνάρτησης B1.

Ορίστε η γραφική παράσταση.

Τι συνέβη; Μοιάζει σαν να έχει ανοίξει οριζόντια. Γιατί;

Θυμηθείτε ότι η αρχική συνάρτηση χρησιμοποιεί τον αριθμό της εβδομάδας ως όρισμα. Δηλαδή, η καταχώρηση του κουμπιού B1 είναι ο αριθμός της εβδομάδας. Το πεδίο ορισμού του αρχικού μοντέλου ήταν από 0 έως 53 και αναλόγως ρυθμίσαμε την κλίμακα του γραφήματος.

Τώρα θυμηθείτε ότι η καταχώρηση της σύνθεσης των συναρτήσεων είναι ο αριθμός της ημέρας του έτους. Το πεδίο ορισμού της είναι το διάστημα 0 έως 365. Επομένως, πρέπει πάλι να αλλάξουμε την κλίμακα στο παράθυρο **Γράφημα**, για να δούμε ένα ολόκληρο έτος από το μοντέλο. Ρυθμίζουμε την κλίμακα του οριζόντιου άξονα από -4 έως 370 ημέρες.

Με αυτήν την κλίμακα το γράφημα μοιάζει πολύ με το αρχικό μας. Να λοιπόν που για μια ακόμα φορά το Function Probe μας έδωσε το ερέθισμα, αλλά και την ευκαιρία να σκεφτούμε τις μεταβλητές και τις συναρτήσεις που χρησιμοποιούμε.

Αν η κλίμακα στο νέο μας γράφημα είχε αλλάξει αυτόματα, πιθανότατα θα παραβλέπαμε το γεγονός ότι οι ανεξάρτητες μεταβλητές του αρχικού μας μοντέλου και της σύνθεσης των συναρτήσεων διαφέρουν. Παρατηρήστε λοιπόν από αυτήν τη σύνθεση συναρτήσεων ότι μια οριζόντια αυξομείωση δεν είναι τίποτα άλλο παρά μια πολλαπλή αλλαγή στην ανεξάρτητη μεταβλητή.

Η επιστήμη των Βαβυλωνίων

Αν έχετε ώρα, θα ήταν χρήσιμο να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση των δεδομένων για τη μεσημβρία. Θα προκύψει μια πολύ ενδιαφέρουσα μορφή καμπύλης. Μιλώντας με ένα καθηγητή ιστορίας των μαθηματικών ανακαλύψαμε ότι οι αρχαίοι Βαβυλώνιοι γνώριζαν για αυτές τις ενδιαφέρουσες συσχετίσεις ανάμεσα στα δεδομένα πριν από 2000 χρόνια περίπου. Για να τις ανακαλύψουν, μάλιστα, χρησιμοποίησαν ένα γιγάντιο ηλιακό ρολόι.